Varianta 015

SUBIECTUL **I**

a) 2
b) $3\sqrt{2}$.
c) -1.
d) $3\sqrt{2}$.
e) $4\sqrt{3}$.
f) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II
1.
a) -3
b) 0 .
c) 1.
d) 1.
e) $\dfrac{3}{5}$.
2.
a) $e^x - 1$.
b) $e - \dfrac{1}{2}$.
c) 0 .
d) $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ **.** Deci funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.
e) 1.

SUBIECTUL III

a) $\det A = 0 \Rightarrow \text{ rang } A = 1$.
b) $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Obținem $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$.

Fie $x_2 = a \in \mathbf{C}$ **.** Atunci $x_1 = -2a$.

Deci , $X = \begin{pmatrix} -2a \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbf{C}$ **.**

c) Fie $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$**.**

Atunci $AB = O_2$ **.**

d) $C \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

e)Fie $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$.

Din $A \cdot D = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

$D \cdot A = \begin{pmatrix} a+2b & 2a+4b \\ c+2d & 2c+4d \end{pmatrix}$.

Cum $A \cdot D = D \cdot A = O_2$, obținem

$a + 2c = 0$; $a + 2b = 0$; $c + 2d = 0$.

Rezultă $c = -\frac{a}{2}$ .Dar cum $a + 2b = 0$,deducem $b = -\frac{a}{2}$ iar $c = \frac{a}{4}$.

Obținem $D = \begin{pmatrix} a & -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & \frac{a}{4} \end{pmatrix}$.Alegem $a = 4$, deci $D = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

f)Arătăm prin inducție matematică .

Pentru $n = 1$este evidentă.

$(A+X)^{n+1} = (A+X)^n (A+X) = (A^n + X^n)(A+X) = A^{n+1} + X^{n+1}$,deoarece

$A^n X = X^n A = O_2$.

g)Cum $Y \in M_2(\mathbf{C})$ inversabilă, atunci $\det Y \neq 0$.

Fie $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\det Y = ad - bc \neq 0$.

Deci $ad \neq bc$.

$AY = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$.

Presupunem prin absurd că $AY = O_2$. Atunci $a + 2c = 0$; $b + 2d = 0$.

Deci $a = -2c; b = -2d \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$.Dar $\det Y = -2cd + 2cd = 0$, contradicție cu

$\det Y \neq 0$.

Deci presupunerea făcută este falsă,atunci $A \cdot Y \neq O_2$.

SUBIECTUL IV

a) $\int f(x)dx = \int x^{-3}dx = -\frac{1}{2x^2} + C$.

b) $f'(x) = -\frac{3}{x^4} < 0, \forall \ x \in (0, \infty)$.

Deci funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

c) $a_{n+1} - a_n = f(n+1) > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Deci şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

e)Inegalitatea este echivalentă cu $2k^2 < (k+1)^3 - k^2(k+1)$ sau

$2k^2 < 2k^2 + 3k + 1$, evident adevarata $\forall k > 0$

f)Cum $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)^3} - \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2}\right) < 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

obținem $b_{n+1} - b_n < 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,adică şirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict descrescător.

g)Cum $a_1 \le a_n \Rightarrow 1 \le a_n$.

Apoi $a_n < b_n \le b_3 = 1{,}22.....$ .Deci $a_n < 1{,}22 \quad ,\forall n \ge 3$.

Dar $a_1 < a_2 < a_3 < 1{,}22$.

Rezultă $1 \le a_n < 1{,}22 \quad , \forall n \in \mathbf{N}^*$.